MÜHENDİSLİK MATEMATİĞİ ÇÖzümleri
1. VİZE

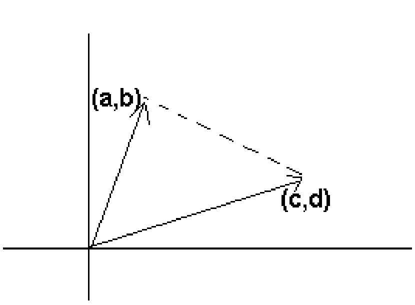
1.a

Rankı 2 olan 4*4 lük bir matris için

a. Determinant değeri
b. Tersinin olup olmaması durumu
c. Matrisi oluşturan 4 vektörün uzayda oluşturdukları şeklin boyutu
d. Matrisi oluşturan 4 vektörün lineer bağımsızlığı ile ilgili olarak ne söylenebilir.

4*4 lük bir matrisin rankı 4'den küçük olduğuna göre determinantı 0 dır.
Determinant 0 ise tersi alınamaz.
Rank 2 ise bu 4 vektör 2 boyutlu bir şekil yani bir düzlem oluşturur.
Rankı 2 ise sadece 2 vektör lineer bağımsızdır.

1.b



Yanda iki boyuntlu uzayda (a,b) vektörü ile (c,d) vektörünün konumları görülmektedir. Bu iki vektörün ucları temsili bir cizgiyle birleştirildiğinde oluşan üçgenin alanı 12 birimkare oluyor. Bu durumda 1. satırı a ,b ikinci satırı c ,d olan 2*2 lik matrisin determinantı ne olur?

Determinantın geometrik yorumuna göre 2 boyutlu matris için 2 vektör arasında kalan paralelkenarın alanı determinantın mutlak değerine eşitti. Bu duruma göre detetrminantın mutlak değeri 24 dür. Çünkü paralelkenarın alanı şekildeki üçgenin alanının 2 katı olur. Determinantın işaretine gelince 2. vektör 1. vektöre göre saat yönünün tersinde kaldığı için işareti negatif olur. O halde söz konusu matrisin determinantı -24 olur.

2.a

$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x.\partial y^2}$ kısmi türevi nümerik yoldan hesaplayan denklemi merkezi fark yaklaşımı ile bulunuz.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial f(x,y+h/2) - \partial f(x,y-h/2)}{h} = \frac{\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} - \frac{f(x,y)-f(x,y-h)}{h}}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{f(x,y+h) - 2f(x,y) + f(x,y-h)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x.\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 f(x+h/2,y)}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f(x-h/2,y)}{\partial y^2}}{h} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x+h/2,y+h)-2f(x+h/2,y)+f(x+h/2,y-h)}{h^2} - \dfrac{f(x-h/2,y+h)-2f(x-h/2,y)+f(x-h/2,y-h)}{h^2}}{h}$$

$$= \frac{f(x+h/2,y+h)-2f(x+h/2,y)+f(x+h/2,y-h)-f(x-h/2,y+h)+2f(x-h/2,y)-f(x-h/2,y-h)}{h^3}$$

h/2ifadelerinden kurtulmak için h=2h yazarsak denklemin son hali

$$\frac{f(x+h,y+2h)-2f(x+h,y)+f(x+h,y-2h)-f(x-h,y+2h)+2f(x-h,y)-f(x-h,y-2h)}{8h^3}$$

Olarak son denklemi elde ediriz

2.b
Yukarıda elde ettiğiniz denklemi kullanarak aşağıda bazı x ve y ye yarşılık değerleri verilen f(x,y) fonksiyonunun $\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x.\partial y^2}$ kısmi türev değerlerini bulup ilgili matrisi doldurun.

. f(x,y)'ye göre denklemde geçen terimlerin konumu aşağıdaki gibi olur.

F(x-2h,y-2h)	F(x-2h,y-h)	F(x-2h,y)	F(x-2h,y+h)	F(x-2h,y+2h)
F(x-h,y-2h)	F(x-h,y-h)	F(x-h,y)	F(x-h,y+h)	F(x-h,y+2h)
F(x,y-2h)	F(x,y-h)	F(x,y)	F(x,y+h)	F(x,y+2h)
F(x+h,y-2h)	F(x+h,y-h)	F(x+h,y)	F(x+h,y+h)	F(x+h,y+2h)
F(x+2h,y-2h)	F(x+2h,y-h)	F(x+2h,y)	F(x+2h,y+h)	F(x+2h,y+2h)

$$\frac{\partial^3 f(2,3)}{\partial x.\partial y^2} = \frac{f(3,5)-2f(3,3)+f(3,1)-f(1,5)+2f(1,3)-f(1,1)}{8} = \frac{1-2+1-5+6-1}{8} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f(3,3)}{\partial x.\partial y^2} = \frac{f(4,5)-2f(4,3)+f(4,1)-f(2,5)+2f(2,3)-f(2,1)}{8} = \frac{2-4+5-4+2-3}{8} = -1/4$$

$$\frac{\partial^3 f(4,3)}{\partial x.\partial y^2} = \frac{f(5,5)-2f(5,3)+f(5,1)-f(3,5)+2f(3,3)-f(3,1)}{8} = \frac{0-4+5-1+2-1}{8} = 1/8$$

Diğer elemanların hesaplanması için förmüle göre tabloda olmayan değerlere ihtiyaç duyulacağı için başka değerler hesaplanamaz. Hesaplanan değerlerin konumu şu şekilde olur.

f(x,y)

x\y	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	3	2	1	0	4
3	1	1	1	1	1
4	5	1	2	1	2
5	5	4	2	1	0

$\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x.\partial y^2}$

x\y	1	2	3	4	5
1	–	–	–	–	–
2	–	–	0	–	–
3	–	–	-1/4	–	–
4	–	–	1/8	–	–
5	–	–	–	–	–

3.
Test ortamından toplanan nem ve basınç değerlerine karşı sıcaklık değerleri aşağıdaki gibi bir tablo halinde size verilmektedir. Sıcaklık değerinin basınç ve nemin $t(n,b) = A.n^B.b^C$ gibi bir fonksiyonu olduğu düşünülmektedir. Bu duruma göre sözkonusu denklemdeki A B ve C nin ne olması gerektiğini yani formülünü en küçük kareler metoduna göre elde edin, ardından aşağıdaki veriler için A B ve C yi hesaplayan matlab kodunu yazın.
n = [1 2 3 2 1 2 3 8]
b = [2 3 2 3 4 5 4 3]
t = [20 22 23 25 20 15 10 12]

$\ln(t) = \ln(A) + B.\ln(n) + C.\ln(b)$ şeklinde lineer denkleme dönüşürülebilir.
Bu durmda denklem

$T = B.X + C.Y + D$ şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde D=ln(A), T=ln(t), X=ln(n), Y=ln(b), B=B,C=C dir.

Bu denklemde toplam hatanın B C ve D ye göre kısmı türevlerin 0 olduğu nokta istenen B C ve D değerleridir. O halde hata fonksiyonunu yazıp B C D ye göre kısmı türevlerini 0 a eşitlersek

$$S = \sum_{i=1}^{N} (B.X_i + C.Y_i + D - T_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial D} = 2.\sum_{i=1}^{N} (B.X_i + C.Y_i + D - T_i) = 2.\left(B\sum_{i=1}^{N} X_i + C.\sum_{i=1}^{N} Y_i + D.\sum_{i=1}^{N} 1 - \sum_{i=1}^{N} T_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2.\sum_{i=1}^{N} X_i (B.X_i + C.Y_i + D - T_i) = 2.\left(B\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + C.\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i + D.\sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} X_i.T_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = 2.\sum_{i=1}^{N} Y_i (B.X_i + C.Y_i + D - T_i) = 2.\left(B\sum_{i=1}^{N} X_i .Y_i + C.\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 + D.\sum_{i=1}^{N} Y_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i.T_i \right) = 0$$

Eşitlikleri matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} \sum X_i & \sum Y_i & \sum 1 \\ \sum X_i^2 & \sum X_i.Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i.Y_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum X_i.T_i \\ \sum Y_i.T_i \end{bmatrix}$$

Formülüne göre B C D hesaplanıp ardından A=exp(D) ile dönüşüm yapıldığında söz konusu A,B, ve C katsayıları elde edilmiş olur.

```
clear all
n=[1 2 3 2 1 2 3 8];
b=[2 3 2 3 4 5 4 3];
t=[20 22 23 25 20 15 10 12];
T=log(t);
X=log(n);
Y=log(b);
```

```
% olusaturaln matrise M diyoruz
M(1,1)=sum(X);
M(1,2)=sum(Y);
M(1,3)=length(n);
M(2,1)=sum(X.^2);
M(2,2)=sum(X.*Y);
M(2,3)=sum(X);
M(3,1)=sum(X.*Y);
M(3,2)=sum(Y.^2);
M(3,3)=sum(Y);
% sonuc matrisine G diyorum.
G(1,1)=sum(T);
G(2,1)=sum(X.*T);
G(3,1)=sum(Y.*T);
% A B C degerleri hesaplanıyor.
W=inv(M)*G;
B=W(1);
C=W(2);
A=exp(W(3));
% sonuclar yazılıyor
fprintf('A=%g,B=%g C=%g',A,B,C);
```

4.

$y''''-2.y''+\cos(y')-y.x-10=0$ dördüncü dereceden diferansiyel denklemini euler ileri yaklaşımıyla ayrıklaştırın, ardından y’’’(0)=1,y’’(0)=2,y’(0)=3,y(0)=4 başlangıç değeri altında x=[0 10] aralığında nümerik olarak çözen matlab programını yazınız.

$$y' = z$$
$$z' = k$$
$$k' = m$$
$$m' = 2k - \cos(z) + y.x + 10$$

$$y_{i+1} = y_i + h.z_i$$
$$z_{i+1} = z_i + h.k_i$$
$$k_{i+1} = k_i + h.m_i$$
$$m_{i+1} = m_i + h.(2k_i - \cos(z_i) + y_i x_i + 10)$$

```
clear all;
y(1)=4;z(1)=3;k(1)=2;m(1)=1;
t(1)=0;h=0.001
for i=1:10/h
      y(i+1)=y(i)+h*z(i);
      z(i+1)=z(i)+h*k(i);
      k(i+1)=k(i)+h*m(i);
      m(i+1)=m(i)+h*(2*k(i)-cos(z(i))+y(i)*x(i)+10);
      t(i+1)=t(i)+h;
end
plot(t,y);
```